Technical Issues
3/2016 pp. 13-18
ISSN 2392-3954

ZASTOSOWANIE ALGEBR HIPERZESPOLONYCH W PRZETWARZANIU SYGNAŁÓW

APPLICATION OF HYPERCOMPLEX ALGEBRAS IN SIGNAL PROCESSING

Łukasz Błaszczyk
Politechnika Warszawska
Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych
Instytut Radioelektroniki i Technik Multimedialnych
ul. Nowowiejska 15/19
00-665 Warszawa
e-mail: L.Blaszczyk@ire.pw.edu.pl

Abstract: The subject of this paper is the application of hypercomplex algebras (in particular quaternions and octonions) in the analysis of time-invariant linear systems. We present the Cayley-Dickson construction of hypercomplex algebras and its important properties. Moreover, we formulate the concept of quaternion and octonion Fourier transform and their properties important from the signal processing point of view. We present an overview of known quaternion Fourier transform applications in the analysis of systems and partial differential equations of two variables. We also point out the direction of further work in the subject of application of the octonion Fourier transform in system analysis and analysis of partial differential equations of three variables. Such considerations are possible thanks to recently proved properties of octonion Fourier transform, which are also stated in this paper.

Keywords: hypercomplex algebras, quaternion Fourier transform, octonion Fourier transform, system analysis, partial differential equations.

Wprowadzenie

Jedną z ważnych dziedzin przetwarzania sygnałów jest tzw. analiza systemów, w szczególności stacjonarnych systemów liniowych. Na przestrzeni lat powstało wiele narzędzi ułatwiających (a czasem wręcz umożliwiających) badanie zachowania się odpowiedzi danego systemu na zadane pobudzenie. Większość metod opiera się na transformacji Laplace'a, a także na transformacji Fouriera. Ich powstanie jest jedną z konsekwencji wprowadzenia do języka matematyki pojęcia liczby zespolonej. Jednostka urojona i (taka, że $\mathbf{i}^2 = -1$) stała się wszechobecna w dzisiejszej nauce i technice, przyczyniając się także do rozwoju analizy systemów.
Rozwój matematyki sprawił jednak, że pojęcia liczby zespolonej doczekało się uogólnień. Początkowo rozszerzono to pojęcie do algebry kwaternionów, tzn. liczb hiperzespolonych zawierających aż trzy jednostki urojone charakteryzujące się własnościami

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1, \tag{1}$$

jednak to nie był koniec [6]. Dalsze prace doprowadziły do powstania algebr liczb hiperzespolonych wyższych rzędów, którym poświęcona jest część druga tego artykułu. Zbadanie własności tych algebr pozwoliło na rozwój wielu narzędzi matematycznych, w tym narzędzi analizy sygnałów takich jak przekształcenie Fouriera. Część trzecia poświęcona jest uogólnieniu pojęcia transformaty Fouriera na omówione wcześniej algebry hiperzespolone, w szczególności na algebrę kwaternionów i oktonionów [8]. W dalszej części opisane są własności transformaty kwaternionowej oraz jej zastosowanie w analizie systemów i pewnych równań różniczkowych cząstkowych [4].
Najważniejszym celem, jaki przyświecał autorowi tego artykułu jest zebranie wiedzy i dotychczasowych osiągnięć w dziedzinie kwaternionowej i oktonionowej transformacji Fouriera oraz ich wykorzystaniu w analizie systemów. Jest to tematyka, która dopiero niedawno się pojawiła i do tej pory poruszana była bardzo rzadko. W związku z tym wiele problemów pozostaje wciąż nierozwiązanych. Dotyczy to w szczególności oktonionowej transformaty Fouriera, która w literaturze jest praktycznie nieobecna. Znanych jest jednak kilka podstawowych wyników dotyczących własności tej transformaty, co pozwala na wskazanie kierunku dalszych prac. Obecnie prace są nieco ułatwione, co jest efektem opracowania odpowiednich narzędzi programistycznych do pracy w algebrach hiperzespolonych, m.in. w środowisku Mathematica [2, 5] czy MATLAB. Rozważaniom dotyczącym własności oktonionowej transformaty Fouriera poświęcona jest część końcowa.

Algebry hiperzespolone – kwaterniony, oktoniony i liczby podwójnie zespolone

Liczby hiperzespolone są naturalnym uogólnieniem liczb zespolonych. Ich definicja oparta jest na iteracyjnej konstrukcji Cayley'a-Dicksona [3]. Algebry liczb hiperzespolonych to algebry rzędu 2N, gdzie $N \in \mathbb{N}_+$, nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ i każda algebra rzędu 2^N powstaje z algebry rzędu 2^{N-1}. Idea, na jakiej opiera się konstrukcja Cayley'a-Dicksona to przedstawienie dowolnego elementu algebry rzędu 2^N jako uporządkowanej pary elementów algebry rzędu 2^{N-1}.

Podstawową (i najmniejszą) algebrą Cayley'a-Dicksona liczb hiperzespolonych jest ciało liczb zespolonych $\mathbb{C}$. Jest to algebra rzędu 2^1, a każdą liczbę zespoloną $z=r_0+r_1\cdot\mathbf{i}$ można przedstawić jako parę liczb rzeczywistych, tzn. $z=(r_0, r_1)$. Działania w algebrze liczb zespolonych są zdefiniowane w sposób naturalny i doskonale znane, a mnożenie (przemienne, łączne i rozdzielne względem dodawania) wykonuje się pamiętając jedynie o fakcie, że $\mathbf{i}^2=-1$.

Algebrą wyższego rzędu (tzn. 2^2) jest ciało nieprzemienne ***liczb kwaternionowych*** $\mathbb{H}$. Każdy kwaternion to liczba postaci

$$q = r_0 + r_1 \cdot \mathbf{e}_1 + r_2 \cdot \mathbf{e}_2 + r_3 \cdot \mathbf{e}_3, r_0, \ldots, r_3 \in \mathbb{R},$$

gdzie $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ to kolejne jednostki urojone (oznaczane zamiennie również symbolami **i**, **j**, **k**), których mnożenie ma własności

$$\mathbf{e}_1^{\,2} = \mathbf{e}_2^{\,2} = \mathbf{e}_3^{\,2} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = -1. \qquad (2)$$

Każdy kwaternion można zapisać jako uporządkowaną parę liczb zespolonych $q = (z_0, z_1)$, tzn. w postaci $q = z_0 + z_1 \cdot \mathbf{e}_2$, gdzie $z_0 = r_0 + r_1 \cdot \mathbf{e}_1$ oraz $z_1 = r_2 + r_3 \cdot \mathbf{e}_1$. Należy zwrócić uwagę na fakt, że mnożenie kwaternionów (w przeciwieństwie do mnożenia liczb rzeczywistych i zespolonych) nie jest przemienne. Jest to jednak działanie łączne, ponadto każdy niezerowy element tej algebry ma element odwrotny.

Warto zauważyć, że z algebry $\mathbb{H}$ można wybrać ciało liczb zespolonych na trzy sposoby [4], co będziemy oznaczać przez

$$\mathbb{C}_\mathbf{i} = \{q \in \mathbb{H}: q = r_0 + r_1 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + 0 \cdot \mathbf{e}_3\},$$
$$\mathbb{C}_\mathbf{j} = \{q \in \mathbb{H}: q = r_0 + 0 \cdot \mathbf{e}_1 + r_2 \cdot \mathbf{e}_2 + 0 \cdot \mathbf{e}_3\},$$
$$\mathbb{C}_\mathbf{k} = \{q \in \mathbb{H}: q = r_0 + 0 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + r_3 \cdot \mathbf{e}_3\}.$$

Uzyskujemy tym samym, że każdy kwaternion to para liczb zespolonych $q = (z_0, z_1)$, gdzie $z_0, z_1 \in \mathbb{C}_\mathbf{i}$, ale możemy zdefiniować algebrę kwaternionów również jako algebrę par liczb z $\mathbb{C}_\mathbf{j}$ lub $\mathbb{C}_\mathbf{k}$. W ten sposób możemy iden-tyfikować kwaterniony jako dwuwymiarową przestrzeń zespoloną $\mathbb{C}_\mathbf{i}^2$, $\mathbb{C}_\mathbf{j}^2$ lub $\mathbb{C}_\mathbf{k}^2$. Ostatnią algebrą hiperzes-poloną, która będzie omówiona w tej pracy, jest algebra ***oktonionów*** $\mathbb{O}$, tzn. algebra rzędu 2^3. Są to liczby postaci

$$o = r_0 + r_1 \cdot \mathbf{e}_1 + r_2 \cdot \mathbf{e}_2 + r_3 \cdot \mathbf{e}_3 + r_4 \cdot \mathbf{e}_4 + r_5 \cdot \mathbf{e}_5 + r_6 \cdot \mathbf{e}_6 + r_7 \cdot \mathbf{e}_7, r_0, \ldots, r_7 \in \mathbb{R},$$

w których występuje aż siedem różnych jednostek urojonych. Tak jak wcześniej, oktoniony można przedstawić wedle konstrukcji Cayley'a-Dicksona jako pary kwaternionów $o = (q_0, q_1)$, tzn. $o = q_0 + q_1 \cdot \mathbf{e}_4$, gdzie q_0 oraz q_1 to odpowiednie kwaterniony. Mnożenie oktonionów jest działaniem dość skomplikowanym, opartym na zasadach podobnych do (2), jednak rozszerzonych o kolejne jednostki urojone. Tak jak mnożenie kwaternionów, mnożenie oktonionów nie jest przemienne, jednak brakuje również kolejnej własności, tzn. łączności. Jedyną własnością, która zachowała się w procesie konstrukcji jest istnienie elementu odwrotnego dla każdego niezerowego oktonionu. Definicję mnożenia w algebrze oktonionów można zdefiniować w postaci odpowiedniej tabeli (tabela 1) lub schematu, jednak proces konstrukcji Cayley'a-Dicksona daje proste i eleganckie formuły [3]. Są one oparte na zapisie elementu algebry hiperzespolonej jako pary elementów algebry niższego rzędu. Niektóre działania opisane za pomocą tej konstrukcji zostały przedstawione w tabeli 2. Wszystkie te działania są naturalnym uogólnieniem działań znanych dla liczb zespolonych.

Podobnie jak w przypadku algebry kwaternionów, z algebry oktonionów można wyodrębnić siedem podalgebr kwaternionowych (nieprzemiennych i łącznych), biorąc trzy jednostki urojone o indeksach (1, 2, 3), (1, 4, 5), (1, 6, 7), (2, 4, 6), (2, 5, 7), (3, 4, 7) lub (3, 5, 6). Algebrę oktonionów można identyfikować wówczas z dwuwymiarową przestrzenią kwaternionowi.

Tab.1. Mnożenie w algebrach Cayley'a-Dicksona – liczbach zespolonych, kwaternionach i oktonionach.

$\cdot$	1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$
1	1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	-1	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_6$
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	-1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$	$-\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_5$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$	-1	$\mathbf{e}_7$	$-\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_4$
$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_6$	$-\mathbf{e}_7$	-1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_6$	$-\mathbf{e}_1$	-1	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	-1	$-\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_7$	$-\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	-1

Tab.2. Działania w algebrach Cayley'a-Dicksona, element X algebry rzędu 2^N jest przedstawiony jako uporządkowana para (x_0, x_1) elementów algebry rzędu 2^{N-1}.

działanie	definicja
dodawanie	$(x_0, x_1) + (y_0, y_1) = (x_0 + y_0, x_1 + y_1)$
element neutralny dodawania	$(0, 0)$
element przeciwny	$-(x_0, x_1) = (-x_0, -x_1)$
sprzężenie	$(x_0, x_1)^* = (x_0^*, -x_1)$
mnożenie	$(x_0, x_1) \cdot (y_0, y_1) = (x_0 \cdot y_0 - y_1^* \cdot x_1, y_1 \cdot x_0 + x_1 \cdot y_0^*)$
element neutralny mnożenia	$(1, 0)$
moduł	$\| (x_0, x_1) \| = (\| x_0 \|^2 + \| x_1 \|^2)^{1/2}$
element odwrotny	$(x_0, x_1)^{-1} = (x_0, x_1)^* \cdot \| (x_0, x_1) \|^{-1}$

Brak przemienności już w algebrze $\mathbb{H}$ jest dość dużym problemem. Dlatego wprowadza się algebrę, która będzie miała własność przemienności – ***liczby podwójne zespolone*** $\mathbb{E}$ (opisane m.in. w [7] oraz [4]). Pierścień $\mathbb{E}$ liczb podwójnie zespolonych jest 4-wymiarową przemienną algebrą nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, którego cztery elementy bazowe 1, **i**, **j** oraz **k** (lub analogicznie 1, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ oraz $\mathbf{e}_3$) spełniają własności

$$-\mathbf{i} \circ \mathbf{i} = \mathbf{j} \circ \mathbf{j} = \mathbf{k} \circ \mathbf{k} = -(\mathbf{i} \circ \mathbf{j} \circ \mathbf{k}) = -1.$$

Widać stąd, że $\mathbb{E}$ zawiera dwie podalgebry zespolone $\mathbb{C}_\mathbf{j}$ i $\mathbb{C}_\mathbf{k}$ oraz algebrę liczb podwójnych $\mathbb{D}_\mathbf{i}$, tzn. taką, że $\mathbf{i} \circ \mathbf{i} = 1$. Liczby podwójne zespolone można zapisać jako

$$Q = r_0 + r_1 \cdot \mathbf{i} + r_2 \cdot \mathbf{j} + r_3 \cdot \mathbf{k} = c_1 + c_2^* \circ \mathbf{i},$$

gdzie:

$c_1 = r_0 + r_3 \cdot \mathbf{k}$, $c_2 = r_1 + r_2 \cdot \mathbf{k} \in \mathbb{C}_\mathbf{k}$.

Mnożenie w algebrze liczb podwójnych zespolonych jest zdefiniowane w sposób podobny jak mnożenie w algebrach Cayley'a-Dicksona, tzn. poprzez mnożenie par liczb zespolonych. Niech $\mathrm{R} = d_1 + d_2^* \circ \mathbf{i}$, wówczas mnożenie $\circ$ definiujemy przez

$$Q \circ R = (c_1\, d_1 + c_2^*\, d_2^*) + (c_1\, d_2^* + c_2^*\, d_1) \circ \mathbf{i}.$$

Powyższe mnożenie liczb zespolonych jest zwyczajnym mnożeniem w algebrze liczb zespolonych. Widać stąd, że mnożenie w algebrze liczb podwójnych zespolonych jest przemienne. Jest jednak za to cena – nie każdy niezerowy element algebry $\mathbb{E}$ ma element odwrotny, pierścień $\mathbb{E}$ nie jest pierścieniem z dzieleniem. Mimo to, działanie $\circ$ jest łączne i rozdzielne względem dodawania. Brak własności dzielenia wynika z faktu, że moduł liczby podwójnej zespolonej wyrażamy przez

$$\| Q \| = (((r_0 + r_1)^2 + (r_2 - r_3)^2)((r_0 - r_1)^2 + (r_2 + r_3)^2))^{1/4},$$

a dzielić wolno pod warunkiem, że moduł liczby jest różny od zera, tzn. nie jest spełniony jeden z dwóch warunków: $r_0 = \pm\, r_1$, $r_2 = \mp\, r_3$. Mogą więc istnieć liczby nierówne zeru, lecz o module równym zero, np. $1 + \mathbf{i}$.

Algebrę liczb podwójnych zespolonych stosuje się np. w analizie maszyn elektrycznych do opisu uzwojenia wirnika maszyny elektrycznej prądu zmiennego uzwojonej symetrycznie, dwufazowo, przez którą płyną prądy sinusoidalnie zmienne [7].

Hiperzespolone transformaty Fouriera

Klasyczna transformata Fouriera, dla funkcji n zmiennych $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$H[\mathbf{i}\boldsymbol{\omega}] = \int_{\mathbb{R}^n} h(\mathbf{x})\, e^{-\mathbf{i}\,(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n)}\, d\mathbf{x},$$

gdzie:

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n),$$
$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n),$$

znalazła liczne zastosowania w analizie systemów (a ogólniej, w analizie równań różniczkowych zwyczajnych i pewnych równań różniczkowych cząstkowych). Uogólnieniem klasycznej (zespolonej) transformaty Fouriera są tzw. hiperzespolone transformaty Fouriera, definiowane dla funkcji dwóch i trzech zmiennych [8]. Przykładami, które wykorzystywać będziemy w tej pracy są kwaternionowa transformacja Fouriera oraz oktonionowa transformacja Fouriera.

Niech $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją dwóch zmiennych o wartościach rzeczywistych. Kwaternionową transformatę Fouriera (ang. *Quaternion Fourier Transform* – QFT) funkcji h definiuje się jako [4]:

$$H[\mathbf{j}\omega, \mathbf{k}\xi] = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\mathbf{j}\,\omega t}\, h(t, x)\, e^{-\mathbf{k}\,\xi x}\, dt\, dx. \tag{3}$$

Prawdziwy jest również wzór na transformatę odwrotną, tzn.

$$h(t, x) = 1/(4\pi^2) \iint_{\mathbb{R}^2} e^{\mathbf{j}\,\omega t}\, H[\mathbf{j}\omega, \mathbf{k}\xi]\, e^{\mathbf{k}\,\xi x}\, d\omega\, d\xi. \tag{4}$$

Należy zauważyć, że jest to jedna z możliwych definicji transformaty Fouriera, nazywana również dwustronną kwaternionową transformatą Fouriera. Często stosuje się definicję transformaty jednostronnej (np. prawostronnej), w której mnożymy przez $e^{-\mathbf{i}\,\omega t}\, e^{-\mathbf{j}\,\xi x}$, zamiast czynników z **j** oraz **k**. Na potrzeby tej pracy przyjmiemy jednak reprezentację daną wzorami (3) i (4).

Transformatę oktonionową rozważać będziemy dla funkcji trzech zmiennych. Niech $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją trzech zmiennych o wartościach rzeczywistych. Oktonionową transformatę Fouriera (ang. *Octonion Fourier Transform* – OFT) funkcji h definiuje się jako [8]:

$$H[\mathbf{e}_1 f_1, \mathbf{e}_2 f_2, \mathbf{e}_4 f_3] = \iiint_{\mathbb{R}^3} h(x_1, x_2, x_3)\, e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1}\, e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2}\, e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3}\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

i mnożenie oktonionów w powyższej całce odbywa się od lewej do prawej. Prawdziwy jest również wzór na transformatę odwrotną, tzn.

$$h(x_1, x_2, x_3) = \iiint_{\mathbb{R}^3} H[\mathbf{e}_1 f_1, \mathbf{e}_2 f_2, \mathbf{e}_4 f_3]\, e^{\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3}\, e^{\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2}\, e^{\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1}\, df_1\, df_2\, df_3.$$

Sposób definiowania obu rodzajów transformat jest nieco inny (w definicji transformaty oktonionowej występują czynniki 2π). Wynika to m.in. stąd, że QFT jest stosowana w praktyce w wielu różnych (równoważnych) formach, podczas gdy własności OFT nie było dotąd analizowane.

Własności kwaternionowej transformacji Fouriera

Z punktu widzenia analizy systemów należy zająć się pewnymi własnościami QFT. Są to odpowiedniki własności znanych dla klasycznej transformaty Fouriera. Niech $F\{f(t, x)\}$ oznacza transformatę Fouriera funkcji $f(t, x)$. Kwaternionowa Transformata Fouriera ma następujące własności [4]:

1. przesunięcie w czasie:
   $F\{h(t - t_0, x)\} = e^{-\mathbf{j}\,\omega t_0} H[\mathbf{j}\omega, \mathbf{k}\xi]$;
2. skalowanie w czasie i przestrzeni:
   $F\{h(at, x)\} = H[\mathbf{j}\omega/a, \mathbf{k}\xi] \,/\, | a |, F\{h(t, bx)\} =$
   $=H[\mathbf{j}\omega, \mathbf{k}\xi/b] \,/\, | b |$;
3. pochodne cząstkowe:
   $F\{h_t(t, x)\} = \mathbf{j}\omega\, H[\mathbf{j}\omega, \mathbf{k}\xi]$,
   $F\{h_x(t, x)\} = H[\mathbf{j}\omega, \mathbf{k}\xi]\, \mathbf{k}\xi$.

Warto tutaj zwrócić uwagę na transformatę pochodnych cząstkowych. W przypadku klasycznej dwuwymiarowej transformaty Fouriera, transformata pochodnej mieszanej drugiego rzędu $h_{tx}(t, x)$ ma postać

$-\,\omega\xi\, H[\mathbf{i}\omega, \mathbf{i}\xi]$,

podczas gdy QFT daje

$\mathbf{j}\omega\, H[\mathbf{j}\omega, \mathbf{k}\xi]\, \mathbf{k}\xi$.

Widzimy więc, że w przypadku klasycznej transformacji Fouriera tracimy pewną informację o strukturze sygnału w dziedzinie czasu i przestrzeni – ta funkcja równie dobrze mogłaby nie być w ogóle różniczkowana. W przypadku kwaternionowej transformaty Fouriera wynik jasno sugeruje, że funkcja została zróżniczkowana względem obu zmiennych. Z tej własności będziemy później korzystać.

Kwaternionowa analiza systemów

Kluczową własnością transformacji Fouriera, z jakiej korzysta się w analizie stacjonarnych systemów liniowych jest dualność splotu i mnożenia. Stacjonarne systemy (dwóch zmiennych) definiuje się za pomocą operatora splotu, który wiąże wejście systemu z wyjściem równaniem

$$y(t, z) = \iint_{\mathbb{R}^2} h(t - \tau, z - \zeta)\, x(\tau, \zeta)\, d\tau\, d\zeta, \qquad (5)$$

gdzie x jest sygnałem wejściowym, y sygnałem wyjściowym, a h jest tzw. odpowiedzią impulsową (czasami nazywaną również funkcją Greena systemu). Prawdziwe jest poniższe twierdzenie, udowodnione w [4].

Twierdzenie 1. Operator splotu (5) ma kwaternionową transformatę Fouriera daną wzorem

$$Y[\mathbf{j}\omega, \mathbf{k}\xi] = H[\mathbf{j}\omega, \mathbf{k}\xi] \cdot (X_0[\omega, \xi] + X_3[\omega, \xi]\, \mathbf{k}) + H[\mathbf{j}\omega, -\mathbf{k}\xi] \cdot (X_1[\omega, \xi]\, \mathbf{i} + X_2[\omega, \xi]\, \mathbf{j}), \qquad (6)$$

gdzie

$$X[\mathbf{j}\omega, \mathbf{k}\xi] = X_0[\omega, \xi] + X_1[\omega, \xi]\, \mathbf{i} + X_2[\omega, \xi]\, \mathbf{j} + X_3[\omega, \xi]\, \mathbf{k}$$

a X, Y oraz H są kwaternionowymi transformatami funkcji, odpowiednio, x, y oraz h.

Transformatę Fouriera odpowiedzi impulsowej nazywamy, tak jak w klasycznej teorii, transmitancją systemu. Twierdzenie w tej postaci jest co najmniej niewygodne do stosowania. Jeśli jednak potraktujemy uzyskany wynik jako element algebry liczb podwójnych zespolonych $\mathbb{E}$, to otrzymamy prostszy rezultat, również pokazany w [4].

Wniosek 2. Równość (6) można zapisać za pomocą mnożenia w algebrze $\mathbb{E}$ jako

$Y[\mathbf{j}\omega, \mathbf{k}\xi] = H[\mathbf{j}\omega, \mathbf{k}\xi] \circ X[\mathbf{j}\omega, \mathbf{k}\xi]$.

Powyższy wniosek jest kluczowy z punktu widzenia analizy systemów i ich połączeń, bowiem prawdziwe pozostają klasyczne wzory na transmitancje połączenia szeregowego i równoległego systemów, tzn.

1. połączenie szeregowe:
$H[\mathbf{j}\omega, \mathbf{k}\xi] = H_1[\mathbf{j}\omega, \mathbf{k}\xi] \circ H_2[\mathbf{j}\omega, \mathbf{k}\xi]$,
2. połączenie równoległe:
$H[\mathbf{j}\omega, \mathbf{k}\xi] = H_1[\mathbf{j}\omega, \mathbf{k}\xi] + H_2[\mathbf{j}\omega, \mathbf{k}\xi]$.

W przypadku systemów ze sprzężeniem zwrotnym również prawdziwy jest klasyczny wzór

$H[\mathbf{j}\omega, \mathbf{k}\xi] = (1 + H_1[\mathbf{j}\omega, \mathbf{k}\xi] \circ H_2[\mathbf{j}\omega, \mathbf{k}\xi])^{-1} \circ H_1[\mathbf{j}\omega, \mathbf{k}\xi]$,

ponieważ algebra $\mathbb{E}$ nie jest algebrą z dzieleniem, to podana odwrotność może nie istnieć. Nie wszystkie dwuwymiarowe stacjonarne systemy liniowe mogą być reprezentowane za pomocą dwuwymiarowego splotu. Zajmijmy się jednak dwoma konkretnymi przykładami, zadanymi za pomocą równań różniczkowych cząstkowych.

Przykład 3. Rozważmy niejednorodne równanie falowe z zerowymi warunkami początkowymi [4]:

$u_{tt}(t, x) - c^2 u_{xx}(t, x) = f(t, x), u(0, x) = 0, \;\; u_t(0, x) = 0.$

Niech $f(t, x) = \cos \omega t \cdot \cos \xi x$ będzie dwuwymiarowym pobudzeniem sinusoidalnym. Chcielibyśmy dowiedzieć się, przy jakich częstotliwościach pobudzenia sinusoidalnego powyższy system będzie niestabilny, tzn. rozwiązanie równania będzie nieograniczone.

Klasyczna teoria równań różniczkowych cząstkowych mówi nam, że rozwiązanie powyższego problemu dane jest wzorem d'Alemberta:

$$u(t, x) = 1/(2c) \int_0^t \int_a^b f(s, y)\, dy\, ds,$$

gdzie

$$a = x - c(t - s) \text{ i } b = x + c(t - s),$$

co po wstawieniu funkcji sinusoidalnej $f(t, x) = \cos \omega t \cdot \cos \xi x$ i wykonaniu dużej ilości skomplikowanych obliczeń daje wynik

$$u(t, x) = 2/(\omega^2 - c^2\xi^2) \cos \xi x \cdot \sin ((c\xi - \omega)t/2) \cdot \cdot \sin ((c\xi + \omega)t/2).$$

Widzimy zatem, że rozwiązanie jest nieograniczone, gdy $c^2\xi^2 = \omega^2$.

Spójrzmy teraz na powyższy problem od innej strony, obliczając kwaternionową transformatę Fouriera tego równania. Zauważmy, że QFT funkcji $u_{tt}(t, x)$ jest równa $(\mathbf{j}\omega)^2 U[\mathbf{j}\omega, \mathbf{k}\xi]$, natomiast funkcji $u_{xx}(t, x)$ jest równa $U[\mathbf{j}\omega, \mathbf{k}\xi]\, (\mathbf{k}\xi)^2$. Wówczas możemy równanie falowe zapisać w postaci

$$U[\mathbf{j}\omega, \mathbf{k}\xi] = (c^2\xi^2 - \omega^2)\, F[\mathbf{j}\omega, \mathbf{k}\xi]$$

i powyższe równanie jest osobliwe, gdy $c^2\xi^2 = \omega^2$. Otrzymaliśmy więc identyczny wynik, jednak przy dużo mniejszym nakładzie pracy.

Powyższy przykład pokazuje, że kwaternionowe przekształcenie Fouriera można stosować do tego typu problemów, jednak warto zauważyć, że zaprezentowane podejście niczym nie różni się od znanej klasycznej transformacji Fouriera. Korzyści, jaki daje nam QFT pokaże poniższy przykład.

Przykład 4. Rozważmy niejednorodne hiperboliczne równanie różniczkowe cząstkowe z zerowymi warunkami początkowymi [4]:

$$Au_{tt}(t, x) + Bu_{tx}(t, x) + Cu_{xx}(t, x) = f(t, x), u(0, x) = 0, \quad u_t(0, x) = 0.$$

Podobnie jak w przykładzie 3, niech $f(t, x)$ będzie dwuwymiarowym pobudzeniem sinusoidalnym jak wyżej i badamy, przy jakich częstotliwościach pobudzenia powyższy system stanie się niestabilny.

Zacznijmy tym razem od kwaternionowej transformacji Fouriera. Można pokazać, przeprowadzając prosty rachunek w algebrze liczb podwójnie zespolonych, że QFT funkcji $u_{tx}(t, x)$ ma postać

$$(\mathbf{j}\omega)\, U[\mathbf{j}\omega, \mathbf{k}\xi]\, (\mathbf{k}\xi) = (\mathbf{i}\omega\xi) \circ U[\mathbf{j}\omega, \mathbf{k}\xi].$$

Wówczas badane równanie różniczkowe sprowadza się do równania algebraicznego

$$(-\omega^2 A + \mathbf{i}\omega\xi B - \xi^2 C) \circ U[\mathbf{j}\omega, \mathbf{k}\xi] = F[\mathbf{j}\omega, \mathbf{k}\xi],$$

czyli

$$U[\mathbf{j}\omega, \mathbf{k}\xi] = (\mathbf{i}B\omega\xi - (A\omega^2 + C\xi^2))^{-1} \circ F[\mathbf{j}\omega, \mathbf{k}\xi],$$

o ile powyższa odwrotność istnieje. Okazuje się, że powyższa odwrotność nie będzie istniała (czyli odpowiedź systemu będzie nieograniczona) dokładnie wtedy, gdy

$$A\omega^2 \pm B\omega\xi + C\xi^2 = 0,$$

co daje dokładnie cztery możliwości.

Aby uzyskać ten wynik w sposób klasyczny, należy ponownie zastosować wzór d'Alemberta przy odpowiedniej zamianie zmiennych (dla równania hiperbolicznego). Prowadzące do wyniku obliczenia są jednak skomplikowane i zostaną pominięte w tej pracy. Zainteresowanych odsyłamy do literatury [9].

Własności oktonionowej transformacji Fouriera i możliwości zastosowania

W przypadku oktonionowej transformaty Fouriera, sytuacja jest bardziej skomplikowana. Do tej pory w literaturze nie ukazały się odpowiedniki własności znanych dla kwaternionowej transformaty Fouriera, jednak w wyniku prac autora zostały one wykazane. Niech $F\{f(t, x_1, x_2)\}$ oznacza transformatę Fouriera funkcji $f(t, x_1, x_2)$. Oktonionowa transformacja Fouriera ma następujące własności:

1. przesunięcie w czasie:

$$F\{h(t - t_0, x_1, x_2)\} = \cos 2\pi f t_0\, H[\mathbf{e}_1 f, \mathbf{e}_2\xi_1, \mathbf{e}_4\xi_2] - \sin 2\pi f t_0\, H[\mathbf{e}_1 f, -\mathbf{e}_2\xi_1, -\mathbf{e}_4\xi_2] \cdot \mathbf{e}_1;$$

2. przesunięcie w przestrzeni:

$$F\{h(t, x_1 - x_0, x_2)\} = \cos 2\pi\xi_1 x_0\, H[\mathbf{e}_1 f, \mathbf{e}_2\xi_1, \mathbf{e}_4\xi_2] - \sin 2\pi\xi_1 x_0\, H[\mathbf{e}_1 f, \mathbf{e}_2\xi_1, -\mathbf{e}_4\xi_2] \cdot \mathbf{e}_2,$$

$$F\{h(t, x_1, x_2 - x_0)\} = \cos 2\pi\xi_2 x_0\, H[\mathbf{e}_1 f, \mathbf{e}_2\xi_1, \mathbf{e}_4\xi_2] - \sin 2\pi\xi_2 x_0\, H[\mathbf{e}_1 f, \mathbf{e}_2\xi_1, \mathbf{e}_4\xi_2] \cdot \mathbf{e}_4;$$

3. pochodne cząstkowe:

$$F\{h_t(t, x_1, x_2)\} = 2\pi f\, H[\mathbf{e}_1 f, -\mathbf{e}_2\xi_1, -\mathbf{e}_4\xi_2] \cdot \mathbf{e}_1,$$

$$F\{h_{x_1}(t, x_1, x_2)\} = 2\pi\xi_1\, H[\mathbf{e}_1 f, \mathbf{e}_2\xi_1, -\mathbf{e}_4\xi_2] \cdot \mathbf{e}_2,$$

$$F\{h_{x_2}(t, x_1, x_2)\} = 2\pi\xi_2\, H[\mathbf{e}_1 f, \mathbf{e}_2\xi_1, \mathbf{e}_4\xi_2] \cdot \mathbf{e}_4.$$

Należy zwrócić uwagę na ciekawą własność. Wszelkie operacje wykonywane w odniesieniu do pierwszej zmiennej powodują, że w wyniku pojawia się składnik zależny od drugiej i trzeciej zmiennej ze zmienionym znakiem. Gdy wykonujemy operacje względem drugiej zmiennej, w wyniku otrzymujemy składnik zależny od trzeciej zmiennej ze zmienionym znakiem. Z kolei operacje wykonywane na trzeciej zmiennej nie powodują zmiany znaków zmiennych i mamy pełną analogię do transformaty kwaternionowej (czy też klasycznej).

Warto przy tym zauważyć, że zależności wiążące transformatę oktonionową dla ujemnych argumentów z transformatą dla argumentów dodatnich są już również znane. W szczególności prawdziwe jest Twierdzenie o symetrii [1]:

$$H[\mathbf{e}_1 f, -\mathbf{e}_2\xi_1, \mathbf{e}_4\xi_2] = (\alpha_5 \circ \alpha_4 \circ \alpha_1)(H[\mathbf{e}_1 f, \mathbf{e}_2\xi_1, \mathbf{e}_4\xi_2]),$$

$$H[\mathbf{e}_1 f, \mathbf{e}_2\xi_1, -\mathbf{e}_4\xi_2] = (\alpha_3 \circ \alpha_2 \circ \alpha_1)(H[\mathbf{e}_1 f, \mathbf{e}_2\xi_1, \mathbf{e}_4\xi_2]),$$

gdzie:

$$\alpha_i(o) = -\mathbf{e}_i \cdot o \cdot \mathbf{e}_i, \text{ dla } i = 1, \ldots, 7,$$

są inwolucjami, a $\circ$ oznacza złożenie funkcji. Z powyższych wzorów wynika również, że

$$H[\mathbf{e}_1 f, -\mathbf{e}_2\xi_1, -\mathbf{e}_4\xi_2] = (\alpha_7 \circ \alpha_6 \circ \alpha_1)(H[\mathbf{e}_1 f, \mathbf{e}_2\xi_1, \mathbf{e}_4\xi_2]).$$

Nierozwiązanym problemem w oktonionowej analizie systemów pozostaje dualność splotu i mnożenia. Na chwilę obecną nie są znane żadne wzory na transformatę oktonionową splotu dwóch funkcji trzech zmiennych. Ze względu na problemy z własnościami pochodnych (konieczność brania wartości transformaty dla ujemnego argumentu) utrudnione wydaje się być również analizowanie równań różniczkowych cząstkowych. Problem znika jedynie w przypadku równań drugiego rzędu (gdy nie pojawiają się składniki pierwszego rzędu), jednak ten przypadek nie wydaje się interesujący, bo sprowadza się do analizy z wykorzystaniem klasycznej transformaty Fouriera. Wciąż jednak prowadzone są prace w tym zakresie.

Podsumowanie

Przedstawione w tym artykule algebry hiperzespolone oraz odpowiedniki transformat Fouriera w tych algebrach dają nowe spojrzenie na zagadnienia związane z analizą stacjonarnych systemów liniowych i równań różniczkowych cząstkowych. Na przykładzie użycia kwaternionowej transformaty Fouriera widać, że pewne obliczenia znacznie się upraszczają, nawet mimo tego, że rozpatrywane są bardziej złożone obiekty, tzn. kwaterniony. W przypadku funkcji trzech zmiennych i transformaty oktonionowej sytuacja jest bardziej skomplikowana, jednak wstępne wyniki sugerują, że pewne rezultaty dotyczące równań różniczkowych mogą zostać osiągnięte, jednak pozostaje to wciąż w sferze dalszych badań.

Literatura

1. Błaszczyk, Ł., Snopek, K.M., Symmetry properties of the Octonion Fourier Transform, *Bull. Pol. Ac.: Tech*. 2016, (w druku).
2. Błaszczyk, Ł., Analiza hiperzespolona w środowisku Mathematica, Zagadnienia Aktualnie Poruszane Przez Młodych Naukowców, cz. 6, 2016, (w druku)].
3. Dickson, L.E., On Quaternions and Their Generalization and the History of the Eight Square Theorem, *Annals of Mathematics*, 1919, 20 (3), pp. 155-171.
4. Ell, T.A., Quaternion-Fourier Transforms for Analysis of Two-Dimensional Linear Time-Invariant Partial Differential Systems, Proc 32nd IEEE Conf Decis Control, 1993, pp. 1830-1841.
5. Falcão, M.I., Miranda, F., Quaternions: A Mathematica Package for Quaternionic Analysis, *Lecture Notes in Computer Science*, 2011, 6784, pp. 200-214.
6. Hamilton, W.H., On quaternions, Proc. Royal Irish Academy, 1847, 3, pp. 1-16.
7. Kurman, K., Liczby podwójne zespolone i możliwość ich zastosowania. Wyk. P.W. ZPS, 1958, 245 (16).
8. Snopek, K., Studies on Complex and Hypercomplex Multidimensional Analytic Signals, Zeszyty Naukowe serii Elektronika, z. 190, Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa, 2013.
9. Weinberger, H.F., A First Course in Partial Differential Equations with Complex Variables and Transform Methods, John Wiley & Sons, 1965.